

## Forschungsnotiz — Resonanz (Saite-Korpus-Kopplung)

**Autor:** Thomas Schüller · forschung@tschueller.com · ORCID 0009-0003-9799-6747 **Affiliation:** privat finanziert, ohne institutionelle Affiliation **Lizenz:** CC BY 4.0 · **Version:** 0.1 · **Datum:** 2026-05-17  
**Strang:** FORSCHUNG / Audio-Werkstatt / 04 Resonanz  
**Dokumenttyp:** Forschungsnotiz (Anwendung von Template v1.0)  
**Status:** abgeschlossener Test mit dokumentierter Bewertung

---

### 1. These

Die Module 02 und 03 haben die Saite isoliert betrachtet. In einem realen Instrument ist die Saite über den Steg an einen Resonanzkörper (Korpus, Resonanzboden) gekoppelt. Diese Notiz prüft die These: **die Saiten-Eigenfrequenz einer gekoppelten Saite-Korpus-Anordnung weicht von der Eigenfrequenz der isolierten Saite ab, und zwar messbar, sobald die Saiten-Frequenz nahe einer Korpus-Resonanz liegt.** Konkret entstehen aus einer einzelnen Saiten-Mode durch Kopplung zwei verschobene Eigenmoden (avoided crossing). Bei zwei Saiten gleicher Frequenz mit gemeinsamem Steg (Klavier-Saitenpaar) entsteht das gleiche Phänomen und erklärt den charakteristischen "lebendigen" Klang.

### 2. Annahmen

1. Saite und Korpus-Mode werden je als ein gedämpfter harmonischer Oszillator modelliert (Ein-Moden-Näherung, gültig nahe einer isolierten Korpus-Resonanz).
2. Kopplung ist linear und konservativ (Kraft proportional zur Auslenkungsdifferenz, Kopplungskonstante  $\kappa$ ).
3. Die Saiten-Dämpfung ist klein ( $\gamma_s/\omega_s \approx 0,001$ ), die Korpus-Dämpfung größer ( $\gamma_r/\omega_r \approx 0,05$ ), weil der Korpus Energie abstrahlt.
4. Nur eine Saiten-Mode und eine Korpus-Mode betrachtet (keine Mehrmoden-Kopplung).
5. Lineare Schwingungen, kleine Amplituden.

### 3. Mathematisches Modell

**M1 — isolierte Saite:** Die Saite schwingt unabhängig vom Korpus.

$f_s = \frac{1}{2L} \sqrt{T/\mu}$ ,  $\text{quad } \text{eine Mode, keine Kopplung}$ .

**M2 — gekoppelte Saite-Korpus-Oszillatoren:** Zwei gedämpfte harmonische Oszillatoren mit Kopplung.

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_s + 2\gamma_s \dot{x}_s + \omega_s^2 x_s &= K(x_r - x_s), \\ m \ddot{x}_r + 2\gamma_r \dot{x}_r + \omega_r^2 x_r &= K(x_s - x_r). \end{aligned}$$

Die ungedämpften Eigenfrequenzen folgen aus der Eigenwertgleichung (avoided crossing):

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_s^2 + \omega_r^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_s^2 - \omega_r^2}{2}\right)^2 + K^2}.$$

Bei  $\omega_s = \omega_r$  ist die Aufspaltung  $\Delta\omega \approx K/\omega_s$ . Die Frequenzantwort der Saite auf eine harmonische Anregungskraft folgt aus dem  $(2 \times 2)$ -System:

$$|X_s(\omega)| = \left| \frac{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\gamma_r\omega}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\gamma_r\omega) - K^2} \right|.$$

| Symbol                | Bedeutung                                                         |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\omega_s = 2\pi f_s$ | Saiten-Kreisfrequenz                                              |
| $\omega_r = 2\pi f_r$ | Korpus-Resonanz-Kreisfrequenz                                     |
| $K$                   | Kopplungskonstante (hier $K = K_{\text{norm}} \cdot \omega_s^2$ ) |
| $\gamma_s, \gamma_r$  | Dämpfungskonstanten                                               |

## 4. Parameter

Drei Konfigurationen mit  $K_{\text{norm}}$  als dimensionslosem Kopplungsmaß:

| Szenario         | $f_s$<br>/ Hz | $f_r$<br>/ Hz | $K_{\text{norm}}$ | $\gamma_s/\omega_s$ |
|------------------|---------------|---------------|-------------------|---------------------|
| A verstimmt      | 440           | 490           | 0.02              | 0.001               |
| B Resonanz       | 440           | 440           | 0.02              | 0.001               |
| C Weinreich-Paar | 440           | 440           | 0.005             | 0.001               |

Toleranz vorab:  $\epsilon = 5\%$  Cent. Begründung: 5 Cent ist die psychoakustische JND-Schwelle (just noticeable difference) für Frequenzunterschiede bei mittleren Frequenzen. Eine Aufspaltung darüber ist als zwei separate Tonhöhen oder als Schwebung hörbar; M1 (eine Mode) ist dann widerlegt.

## 5. Vorhersage

| Szenario    | Erwartete Aufspaltung                              | Erwartete Bewertung       |
|-------------|----------------------------------------------------|---------------------------|
| A verstimmt | zwei getrennte Moden bei $\sim f_s$ und $\sim f_r$ | M1 widerlegt (zwei Peaks) |
| B Resonanz  | maximale Aufspaltung $\sim$                        | M1 widerlegt              |

|                  |                                                     |                       |
|------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------|
|                  | $K \backslash \omega_s$                             | (avoided crossing)    |
| C Weinreich-Paar | kleine Aufspaltung,<br>beide nahe $\backslash(f_s)$ | M1 widerlegt (subtil) |

## 6. Falsifikationskriterium

Aufspaltung zwischen den beiden gekoppelten Eigenmoden  $\backslash(> \backslash \text{varepsilon} = 5 \backslash)$  Cent  $\Rightarrow$  das Modell der isolierten Saite (M1) ist widerlegt, weil es nur eine Mode vorhersagt, während M2 zwei messbar getrennte Moden zeigt.

## 7. Konkurrenzmodelle

- **K1 — isolierte Saite (M1):** das geprüfte engere Modell.
- **K2 — Zwei-Oszillator-Kopplung (M2):** das verwendete Testmodell (avoided crossing).
- **K3 — Mehrmoden-Korpus:** der reale Korpus hat viele Resonanzen; jede koppelt unterschiedlich stark an jede Saiten-Mode. Vollständiges Modell mit modaler Zerlegung.
- **K4 — Nichtlineare Kopplung:** bei großen Amplituden Erzeugung von Kombinationstönen.
- **K5 — Strahlungsdämpfung:** der Korpus strahlt Schall ab; das ist die eigentliche Funktion des Instruments und der Grund für die hohe Korpus-Dämpfung.
- **K6 — Weinreich-Doppelpolarisation:** jede Saite hat zwei Schwingungsebenen, die ebenfalls über den Steg koppeln.

## 8. Versagensbereich

- **Mehrere überlappende Korpus-Resonanzen** in der Nähe der Saiten-Frequenz — Ein-Moden-Näherung bricht.
- **Sehr starke Kopplung**  $\backslash( \backslash K_{\text{norm}} > 0 \backslash, \backslash 2 \backslash )$  — Störungstheorie versagt, nichtlineare Effekte.
- **Hohe Amplituden** — Saite zieht sich, Spannung ändert sich, Kombinationstöne.
- **Transiente Vorgänge** (Anschlag, Abklingen) — stationäre Eigenmoden-Beschreibung greift nicht für die ersten Millisekunden.

## 9. Simulation

Numerische Auswertung in `resonanz_simulation.py`. Pro Szenario:

1. Eigenfrequenzen  $\backslash(f_+, f_-)$  aus der avoided-crossing-Formel.
2. Aufspaltung in Hz und Cent.
3. Frequenzantwort  $\backslash(|X_s(\omega)| \backslash)$  über ein Frequenzband um  $\backslash(f_s)$ .
4. Vergleich mit der isolierten Saite (Lorentz-Peak bei  $\backslash(f_s)$ ).

Ergebnisse in `resonanz_results.json`. Plots pro Szenario (Amplitudenantwort gekoppelt vs. isoliert) als `resonanz_detuned.svg`, `resonanz_resonance.svg`, `resonanz_weinreich.svg`.

## 10. Ergebnis

| Szenario | $\backslash(f_+)$ /<br>Hz | $\backslash(f_-)$ /<br>Hz | Aufspaltung<br>/ Hz | Aufspaltung B<br>/ Cent |
|----------|---------------------------|---------------------------|---------------------|-------------------------|
|----------|---------------------------|---------------------------|---------------------|-------------------------|

|                |             |             |             |              |    |
|----------------|-------------|-------------|-------------|--------------|----|
| A              | \           | \           | \(50\{,}7\) | \(188\{,}9\) | wi |
| verstimmt      | (490\{,}3\) | (439\{,}6\) |             |              |    |
| B              | \           | \           | \(8\{,}8\)  | \(34\{,}6\)  | wi |
| Resonanz       | (444\{,}4\) | (435\{,}6\) |             |              |    |
| C              | \           | \           | \(2\{,}2\)  | \(8\{,}7\)   | wi |
| Weinreich-Paar | (441\{,}1\) | (438\{,}9\) |             |              |    |

Plots: resonanz\_detuned.svg, resonanz\_resonance.svg,  
resonanz\_weinreich.svg.

## 11. Bewertung

**Szenario A (verstimmt).** Obwohl die Saite (440 Hz) deutlich von der Korpus-Resonanz (490 Hz) entfernt ist, sind im Spektrum zwei Peaks vorhanden: einer schmal bei der Saiten-Frequenz (439,6 Hz, leicht verschoben), einer breit und flach bei der Korpus-Resonanz (490 Hz, stark gedämpft). Das isolierte-Saite-Modell sieht nur den ersten. Allerdings ist die Verschiebung der Saiten-Mode selbst klein ( $\approx 0,08\%$ ), weil die Kopplung schwach gegen den Frequenzabstand ist. Praktische Konsequenz: ein Instrument mit einer Korpus-Resonanz fern der gespielten Note klingt fast wie eine isolierte Saite — der Korpus-Peak strahlt aber separat ab und färbt den Klang.

**Szenario B (Resonanz).** Wenn die Saiten-Frequenz genau auf einer Korpus-Resonanz liegt, entsteht das klassische avoided crossing: zwei Eigenmoden bei 435,6 und 444,4 Hz, eine Aufspaltung von 34,6 Cent. Das ist gut ein Drittel-Halbton, deutlich hörbar. Praktische Konsequenz: ein “wolf tone” bei Streichinstrumenten — ein Ton, der instabil klingt oder “heult”, weil die Saiten-Frequenz mit einer starken Korpus-Resonanz zusammenfällt und die Energie zwischen Saite und Korpus hin- und herpendelt. Cellisten kennen das als reales Problem bei bestimmten Tönen (oft um F/Fis auf der G-Saite).

**Szenario C (Weinreich-Saitenpaar).** Zwei Saiten gleicher Frequenz mit gemeinsamem Steg koppeln über den Steg. Die Aufspaltung von 8,7 Cent ist klein, aber über der JND-Schwelle. Sie erzeugt eine langsame Schwebung und — wichtiger — einen charakteristischen zweistufigen Abklingvorgang: erst klingt die symmetrische Mode schnell ab (sie bewegt den Steg stark, strahlt stark), dann die antisymmetrische Mode langsam (sie bewegt den Steg kaum, hält lange). Genau das beschreibt Weinreich (1977) als Grund für den “lebendigen”, langen Klavier-Ton. Es ist kein Stimmfehler, sondern eine unvermeidbare Konsequenz der Steg-Kopplung zweier nominell gleicher Saiten.

**Gemeinsamer Befund:** Die isolierte Saite ist überall ein Spezialfall — der Grenzfall verschwindender Kopplung. Sobald die Saite an einen realen, schwingenden Körper angekoppelt ist (und das muss sie sein, sonst gäbe es keinen abgestrahlten Schall), ist ihre Eigenfrequenz keine einzelne Zahl mehr, sondern ein Paar (oder bei Mehrmoden-Korpus ein ganzes Spektrum) gekoppelter Eigenmoden. Das ist der Übergang von “Saite” zu “Instrument”.

## 12. Nächster Test

**Modul 05 Modulation.** Vibrato und Tremolo als zeitabhängige Modulation der Saiten-Parameter. Vibrato ist eine Frequenzmodulation (periodische Längenänderung durch die Greifhand); Tremolo eine Amplitudenmodulation. Vorhersage: Vibrato erzeugt im Spektrum Seitenbänder im Abstand der Modulationsfrequenz (typisch 5–7 Hz); die Bandbreite folgt aus dem

## Anhang A — Querverweise

- Praxis-Erklärung: PRAXIS-Resonanz.md (folgt)
- Begleitpapier: BEGLEITPAPIER-Resonanz.md (folgt)
- Werkzeug: resonanz-werkzeug.html (folgt)
- Code: resonanz\_simulation.py
- Plots: resonanz\_detuned.svg, resonanz\_resonance.svg, resonanz\_weinreich.svg
- Ergebnisdaten: resonanz\_results.json
- Vorgänger-Module: 02-saitenschwingung/, 03-klavier/ (Saiten-Eigenfrequenzen werden vorausgesetzt).
- Verwandte Module: 01 Spektrum (FFT), 05 Modulation (folgt), Mechanik 03 Harmonischer Oszillator (Einzel-Oszillator als Grenzfall).

## Anhang B — Externer Bestandscheck

- **Fletcher & Rossing (1991)** Kap. 10-12: gekoppelte Schwingungen in Musikinstrumenten.
- **Weinreich (1977)** "Coupled piano strings" JASA: primäre Quelle für das Saitenpaar-Phänomen.
- **Gough (1981)** "The theory of string resonances on musical instruments" *Acustica*: avoided crossing bei Streichinstrumenten, wolf tone.
- **Woodhouse (2014)** "The acoustics of the violin: a review" *Rep. Prog. Phys.*: moderner Überblick zur Saite-Korpus-Kopplung.

Was die Werkstatt-Notiz davon unterscheidet: Open-Source-Numerik, einheitliches Falsifikationsformat mit vorab gewählter Cent-Toleranz, drei kontrastierende Szenarien (verstimmt, Resonanz, Saitenpaar), Brücke zur Praxis-Erklärung mit Hörbeispielen (wolf tone, Klavier-Klang).

## Anhang C — Quellen

- Fletcher, N. H.; Rossing, T. D. (1991). *The Physics of Musical Instruments*. Springer. Kap. 10-12.
- Weinreich, G. (1977). Coupled piano strings. *JASA* 62(6):1474. doi:10.1121/1.381677
- Gough, C. (1981). The theory of string resonances on musical instruments. *Acustica* 49:124.
- Woodhouse, J. (2014). The acoustics of the violin: a review. *Rep. Prog. Phys.* 77:115901. doi:10.1088/0034-4885/77/11/115901
- Chowning, J. (1973). The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation. *JAES* 21(7):526.